17 KONKURS MATEMATYCZNY
GAMMA
Etap I – zadania konkursowe

kategoria GM – dla uczniów klas II-III gimnazjum

Zadanie 1. Liczby naturalne m i n spełniają równość NWW (m, n) + NWD (m, n) = m + n. Udowodnij, że jedna z liczb m i n dzieli drugą.

Zadanie 2. Kiedy w dniu urodzin mojego dziadka spytano go, ile właśnie skończył lat, on odpowiedział: dodaj do roku moich urodzin upływający właśnie rok, a następnie odejmij od tego rok, w którym skończyłem 20 lat, po czym odejmij rok, w którym upłynęło mi 30 lat życia, wówczas otrzymasz liczbę 16. Ile lat ma mój dziadek?

Zadanie 3. W zawodach olimpiady matematycznej wzięło udział 100 uczniów wyłonionych z 15 szkół. Udowodnij, że pewne dwie szkoły mają w tych zawodach tę samą liczbę reprezentantów (być może nie mają nikogo wśród nich).

Zadanie 4. Podczas suszenia śliwki tracą *68%* swojej masy. Ile kilogramów owoców należy ususzyć, aby uzyskać *16 kg* suszonych śliwek?

Zadanie 5. Uzasadnij, że

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{100^2}<\frac{99}{100}.$$

Zadanie 6. Z miast A i B wyruszyły jednocześnie dwa samochody, jadąc naprzeciw siebie. W chwili spotkania okazało się, że pierwszy z nich przebył drogę o 60 km dłuższą niż drugi. Pierwszy samochód przybył do B po 5 godzinach, drugi zaś do A po $7\frac{1}{2}$ godzinach jazdy. Jaka jest odległość między miastami?

Zadanie 7. Uczniów biorących udział w olimpiadzie matematycznej należało umieścić w salach tak, by w każdej sali była ta sama liczba osób, przy czym nie więcej niż 32 osoby. Kiedy najpierw w każdej sali umieszczono po 22 osoby, dla jednego zawodnika zabrakło miejsca. Gdy zaś z jednej sali zrezygnowano, miejsc w pozostałych wystarczyło dla wszystkich. Ilu zawodników wzięło udział w olimpiadzie oraz ile sal przygotowano dla nich?

Zadanie 8. W koło wielkie kuli o promieniu r wpisano kwadrat. Wykaż, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu P powierzchni kuli od wierzchołków kwadratu równa jest $8r^2$.

Zadanie 9. W trójkącie ABC o polu S poprowadzono środkową AM. Punkt K leżący na tej środkowej dzieli ją w stosunku AK : AM = 1 : 3. Przez punkt K i wierzchołek B poprowadzono prostą, która przecięła bok AC w punkcie L. Znajdź pole trójkąta AKL.

Zadanie 10. Klomb ma kształt koła opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości *3 m*. Powierzchnia trójkąta ma być obsadzona bratkami, a pozostała część klombu stokrotkami. Ile co najmniej bratków i stokrotek należy przygotować, jeżeli na powierzchni $1\ m^2$ umieszcza się przeciętnie 30 sadzonek?

Rozwiązania dowolnej liczby zadań (każde na oddzielnej, podpisanej kartce) ***wraz z kartą zgłoszenia*** *należy przysłać do* ***15 listopada 2016r****. na adres: Zespół Szkół Nr 3, ul. Łukasiewicza 11, 09-400 Płock z dopiskiem na kopercie: Konkurs Matematyczny GAMMA*

17 KONKURS MATEMATYCZNY GAMMA

Etap I – zadania konkursowe

kategoria LO – dla uczniów klas I-II szkół ponadgimnazjalnych

Zadanie 1. Technik drogowy przeprowadzający inspekcję torów Elektrycznej Kolei Dojazdowej (EKD) między Warszawą a Włochami, spostrzegł że pociągi nadchodzące z tyłu mijają go co 15 minut, a nadchodzące z przodu co 5 minut. Obliczyć co ile minut wychodzą pociągi ze swoich stacji końcowych i jaka jest ich średnia prędkość. Przyjąć, że zarówno pociągi EKD, jak i technik, poruszali się ruchem jednostajnym.

Zadanie 2. Oblicz $\frac{3a}{a+b}$, jeśli wiesz, że $\frac{a+b}{b}=\frac{1}{4}$.

Zadanie 3. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie oraz $ab+bc+ca > a+b+c$, to $a+b+c > 3$.

Zadanie 4. Marysia i Janek są rodzeństwem. Marysia ma trzy razy więcej braci niż sióstr, a Janek ma o dwóch braci więcej niż sióstr. Ile jest dzieci w tej rodzinie?

Zadanie 5. W zatoce jeziora są wbite dwa pale. Jeden pal wystaje nad wodę na wysokość $2\ m$, drugi na wysokość $1m$. Odległość między palami wynosi $10\ m$. Na każdym palu siedzi ptak czatujący na rybę. Prędkość lotu ptaka siedzącego na wyższym palu jest dwukrotnie większa od prędkości lotu ptaka siedzącego na niższym palu. Gdy na linii łączącej pale plusnęła ryba, ptaki zobaczyły ją jednocześnie i jednocześnie rzuciły się po zdobycz. W którym miejscu plusnęła ryba, jeżeli obydwa ptaki dopadły ją jednocześnie?

Zadanie 6. Zbiornik na deszczówkę ma kształt walca o średnicy długości *90 cm*. Właściciel zbiornika, aby chronić napełnioną beczkę przed zanieczyszczeniami, kupił płaską pokrywę w kształcie sześciokąta foremnego o boku długości *45 cm*. Oceń, czy pokrywa była odpowiednia. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7. Z naczynia o pojemności 64 litrów odlano część spirytusu i dodano tyleż wody, następnie odlano tyle samo litrów roztworu i w naczyniu pozostał roztwór o zawartości 49 litrów spirytusu. Ile litrów płynu odlano z naczynia za każdym razem?

Zadanie 8. Z banku wzięto kredyt *15 000 zł* przy stopie procentowej *30%* w skali roku. Oblicz kwotę, jaką należy oddać do banku za 5 miesięcy, przyjmując, że kredyt ma być spłacony jednorazowo.

Zadanie 9. Wyznacz wszystkie liczby całkowite n, dla których liczba $\frac{n^5+3}{n^2+1}$ jest całkowita.

Zadanie 10. Rozstrzygnij, czy liczba $3^{22}+5\cdot 3^{10}+1$ jest liczbą pierwszą.

Rozwiązania dowolnej liczby zadań (każde na oddzielnej, podpisanej kartce) ***wraz z kartą zgłoszenia*** *należy przysłać do* ***15 listopada 2016r****. na adres: Zespół Szkół Nr 3, ul. Łukasiewicza 11, 09-400 Płock z dopiskiem na kopercie: Konkurs Matematyczny GAMMA*